

Анализа 1

12.11.2020

1. Израчунајте:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$

2. Докажи ковергенцију следних низа:

a) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\arctg k}{3^k}$

d) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$

б) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$

□

3. Наћи најлећи члан низа

a) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $x_n = \frac{n^2}{2^n}$

d) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $x_n = \frac{1000^n}{n!}$

4. Нека је $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ низ природних бројева такав да је $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = +\infty$. Докажи да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e$$

5. Нека је $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ низ реалних бројева такав да је

$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = +\infty$. Докажи да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e$$

6. Нека је $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ низ реалних бројева такав да је $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = -\infty$. Дokaзати да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{r_n}\right)^{r_n} = e$$

7. Низ $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ је задат са $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$, $x_1 > 0$.

Израчунајте $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

8. Низ $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ је задат са $x_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{x_n^2}{2}$, $x_1 = 0$.

Израчунајте $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.